Adı Soyadı: 12.06.2019
Numarası:

2018-2019 BAHAR DÖNEMİ CEBİR II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) Aritmetik birimi (birimsel eleman) tanımlayınız ve iki aritmetik birimin çarpımlarının da bir aritmetik birim olduğunu gösteriniz.

   b) R birimli ve değişmeli bir halka, J, R 'nin ($J \neq R$) bir ideali olsun. R/J bir tamlık bölgesi ise J asal idealdir, gösteriniz.

2) Birimli ve değişmeli bir halkada M_1 ve M_2 iki maksimal ideal ise $M_1.M_2 = M_2 \cap M_1$ olduğunu gösteriniz.

3) a) R bir halka $a,b,c \in R$ olsun. a, b ve c ile değişmeli ise a'nın $b+c$ ve $b.c$ ile de değişmeli olduğunu gösteriniz.

   b) $H = \{ (a, 3^b) \mid a \in \mathbb{Z}_Ç, b \in \mathbb{Z} \}$ cümlesinin $(a, 3^b) \oplus (c, 3^d) = (a+c, 3^{b+d})$ ve $(a, 3^b) \odot (c, 3^d) = (a.c, 1)$ işlemleri ile bir halka olduğu biliniyor.

$$\varphi : H \to \mathbb{Z}$$
$$(a,3^b) \to \varphi(a,3^b) = \frac{3a}{2} - 5b$$

   fonksiyonunun bir halka homomorfizması olup olmadığını araştırınız.

4) a) $f(x) = x^6 + x^3 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu asal mıdır?

   b) $13i - 1$ Gauss tamsayısını asal çarpanlara ayırınız.

5) a) K ve L iki halka $g: K \to L$ bir halka epimorfizması olsun. Eğer N^*, L'nin bir maksimal ideali ise $g^{-1}(N^*)$ da K'nın bir maksimal idealidir, gösteriniz.

   b) Her alt halka bir ideal belirtir mi? Gösteriniz.

NOT: Sadece 4 soru cevaplayınız.

Başarılar...

Cevap Anahtarı

1) a) Bir R Tamlık bölgesinin tüm elemanlarını bölen R'nin bir elemanına aritmetik birim veya birimsel eleman denir. Şimdi R den a ve b gibi keyfi iki aritmetik birim alalım.
$a.c = 1 = c.a$ ve $b.d = 1 = d.b$ olş $\exists c, d \in R$ vardır
$(ab)(dc) = a(bd)c = a.c = 1$
$(dc)(ab) = d(ca)b = d.b = 1$ $\Rightarrow (ab)(dc) = 1 = (dc)(ab)$ olu
$ab \in R$ de aritmetik birimdir

1) b) R/J bir Tamlık bölgesi olsun. Asal ideal tanımından R birimli ve değişmeli olduğundan $ab \in J$ için $a \in J$ veya $b \in J$ olduğunu göstermeliyiz

$$ab \in J \Rightarrow ab + J = J$$
$$\Rightarrow (a+J)(b+J) = J$$
R/J T.B, sıfır bölensiz $\Rightarrow a + J = J$ veya $b + J = J$
$$\Rightarrow a \in J \text{ veya } b \in J$$ olup J asal idealdir

2) M_1 ve M_2 bir R birimli ve değişmeli halkasının iki maksimal ideali olsun. $M_1 . M_2 = M_2 \cap M_1$ old. gösterelim

$M_1 + M_2 = R$ olur. Ayrıca $M_1 M_2 \subseteq M_1$

Bu durumda $M_1 M_2 \subseteq M_2 \cap M_1$ (1)

ve $M_1 M_2 \subseteq M_2$ olduğundan

Ayrıca
$$M_1 \cap M_2 = (M_1 \cap M_2) . R$$
$$= (M_1 \cap M_2)(M_1 + M_2)$$
$$= (M_1 \cap M_2) M_1 + (M_1 \cap M_2) . M_2$$
$$\subset M_2 M_1 + M_1 M_2$$
$$\subset M_1 M_2$$ olup

$M_2 \cap M_1 \subset M_1 M_2$ ... (2) ... elde edilir (1) ve (2) den istenen eşitlik sağlanır.

3) a) a, b ve c ile değişmeli ise $a.b = b.a$ ve $a.c = c.a$ olur.

$$a.(b+c) = ab + ac$$
$$= ba + ca$$
$$= (b+c).a$$ olup a, $b+c$ ile değişmelidir

$$a.(bc) = (ab)c$$
$$= (ba)c$$
$$= b(ac)$$
$$= b(ca)$$
$$= (bc).a$$ olup a, $b.c$ ile değişmelidir

3) b) $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(a, 3^b) \longrightarrow \varphi(a, 3^b) = \frac{3a}{2} - 5b$ fonksiyonu

halka homomorfizması olur mu?

Öncelikle $\oplus$ işlemini kontrol edelim.

$\forall (a,3^b), (c, 3^d) \in H$ için

$$\varphi((a,3^b) \oplus (c,3^d)) = \varphi(a+c, 3^{b+d})$$
$$= \frac{3(a+c)}{2} - 5(b+d)$$
$$= \frac{3a}{2} + \frac{3c}{2} - 5b - 5d$$
$$= \frac{3a}{2} - 5b + \frac{3c}{2} - 5d$$
$$= \varphi(a, 3^b) + \varphi(c, 3^d)$$

Şimdi de $\odot$ işlemini kontrol edelim

$\forall (a,3^b), (c,3^d) \in H$ için

$$\varphi((a,3^b) \odot (c,3^d)) = \varphi(ac, 1)$$
$$= \varphi(ac, 3^0)$$
$$= \frac{3ac}{2} - 5.0 = \frac{3ac}{2}$$

$$\varphi(a,3^b) \cdot \varphi(c,3^d) = \left(\frac{3a}{2} - 5b\right) \cdot \left(\frac{3c}{2} - 5d\right)$$
$$= \frac{9}{4}ac - \frac{15}{2}ad - \frac{15}{2}bc + 25bd$$ olup

$\varphi((a,3^b) \odot (c,3^d)) \neq \varphi(a,3^b) \cdot \varphi(c,3^d)$ olduğundan

φ fonksiyonu homomorfizma değildir

4) a) $f(x) = x^6 + x^3 + 3x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ için

Eisenstein uygulanamaz

$$f(x+1) = (x+1)^6 + (x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 1$$
$$= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 + x^3 +$$
$$3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 + 6x + 3 + 1$$
$$= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 21x^3 + 21x^2 + 15x + 6$$

$p = 3$ alınırsa $3|6, 3|15, 3|21, 3|21, 3|15, 3|6,$
$3 \nmid 1$
$9 \nmid 6$ * Eisensteina göre $f(x+1)$ ve dolayısıyla

$f(x)$, $\mathbb{Q}[x]$ de asaldır Polinom ilkel olduğundan $\mathbb{Z}[x]$ de asaldır

4b) $13i-1 = \alpha.\beta$

$d(13i-1) = d(\alpha).d(\beta)$

$170 = d(\alpha).d(\beta)$

$d(\alpha) = 1, 2, \ldots$

$\alpha = 1+i$ için $\dfrac{13i-1}{1+i}\dfrac{(1-i)}{(1-i)} = \dfrac{(13i-1)(1-i)}{2} = \dfrac{14i+12}{2} = 7i+6$

$7i+6 = \gamma.\theta$

$d(7i+6) = d(\gamma).d(\theta)$

$85 = d(\gamma).d(\theta)$

$d(\gamma) = 1, 5, \ldots$

$\gamma = 2+i$ alınırsa $\dfrac{7i+6}{2+i}\dfrac{(2-i)}{(2-i)} = \dfrac{(7i+6)(2-i)}{5} \notin \mathbb{Z}[i]$

$\gamma = 2-i$ olup $\dfrac{7i+6}{2-i}\dfrac{(2+i)}{(2+i)} = \dfrac{(7i+6)(2+i)}{5} = \dfrac{20i+5}{5} = 4i+1$

$13i-1 = (6+7i)(1+i)$

$13i-1 = (2-i)(4i+1)(1+i)$

5) a) N^*, L'nın bir maksimal ideali olsun. Bu durumda $g^{-1}(N^*)$ da K'nın bir idealidir (ilgili teoreme göre). Biz $g^{-1}(N^*)$'ın K da maksimal olduğunu gösterelim. $g^{-1}(N^*) \subseteq I \subseteq K$ olacak şekilde K'nin bir I ideali bulunur ni ele alalım. Bu durumda $N^* \subseteq g(I) \subseteq g(K)$ dır $g(K) = L$ dir $g: K \to L$ epimorfizma olduğundan $N^* \subseteq g(I) \subseteq L$, N^*, L de maksimal ideal olduğundan $g(I) = N^*$ veya $g(I) = L$ dir. Yani $g^{-1}(N^*) = I$ veya $I = K$ dir. Yani $g^{-1}(N^*)$, K da maksimaldir.

b) Her alt halka ideal değildir. Örneğin $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halkası, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar halkasının bir alt halkasıdır. Fakat ideali değildir. Çünkü $\frac{3}{2}i \in \mathbb{C}$, $(3+5i) \in \mathbb{Z}[i]$ için $\frac{3}{2}i.(3+5i) = \frac{9}{2}i + -\frac{15}{2} \notin \mathbb{Z}[i]$

Farklı örnekler de verilebilir